Surjectivité de l'exponentielle

Théorème
Soit $f\ :\ U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in U$.
On suppose df_a inversible.
Alors il existe des voisinages V et W de a et $f(a)$ respectivement tels que

- $f\,|_V :\ V \to W$ *est bijective*

- $g = (f\,|_V)^{-1}$ *est de classe $\mathcal{C}^1$ et* $\forall x \in V,\ dg_{f(x)} = (df_x)^{-1}$.

DÉMONSTRATION
Quitte à considérer la fonction $x \mapsto (df_a)^{-1}\,[f(a+x) - f(a)]$, on peut supposer sans perte de généralités que $a = 0$, $f(a) = 0$ et $df_a = \mathrm{Id}$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe $r > 0$ tel que $\overline{\mathbb{B}}\,(0,r) \subset U$ et

$$\forall x \in \mathbb{B}\,(0,r)\,,\ \left\|\!\left|df_x - df_0\right|\!\right\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{B}\,(0,r)$, $df_x = \mathrm{Id} - u_x$ avec $\left\|\!\left|u_x\right|\!\right\| = \left\|\!\left|df_x - \mathrm{Id}\right|\!\right\| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Cela implique que df_x est inversible, d'inverse $(df_x)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_x^k$.

De plus

$$\left\|\!\left|(df_x)^{-1}\right|\!\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left\|\!\left|u\right|\!\right\|^k \leqslant 2.$$

Soit $y \in \mathbb{B}\left(0, \frac{r}{2}\right)$.

On pose $h^{(y)}\ :\ \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{B}}\,(0,r) & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & y + x - f(x) \end{array}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{B}\,(0,r)$.

Alors

$$\forall x \in \mathbb{B}\,(0,r)\,,\ \left\|\!\left|dh_x^{(y)}\right|\!\right\| = \left\|\!\left|\mathrm{Id} - df_x\right|\!\right\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Par inégalité des accroissements finis et par passage à la limite,

$$\forall x, x' \in \overline{\mathbb{B}}(0,r)\,,\ \left\|h^{(y)}(x) - h^{(y)}(x')\right\| \leqslant \frac{1}{2}\left\|x - x'\right\|.$$

En particulier,

$$\forall x \in \overline{\mathbb{B}}(0,r)\,,\ \left\|h^{(y)}(x) - h^{(y)}(0)\right\| = \left\|x - f(x)\right\| \leqslant \frac{\|x\|}{2}.$$

Donc

$$\forall x \in \overline{\mathbb{B}}(0,r)\,,\ \left\|h^{(y)}(x)\right\| \leqslant \|y\| + \left\|x - f(x)\right\| \leqslant \|y\| + \frac{\|x\|}{2} < r.$$

On a montré que $h^{(y)}$ est à valeurs dans $\mathbb{B}(0,r) \subset \overline{\mathbb{B}}(0,r)$ complet.

D'après le théorème du point fixe sur un espace complet, $h^{(y)}$ a un unique point fixe $x \in \overline{\mathbb{B}}(0,r)$ qui vérifie la relation :

$$x = y + x - f(x) \Leftrightarrow f(x) = y.$$

De plus, comme $h^{(y)}$ est à valeurs dans $\mathbb{B}(0,r)$, $x = h^{(y)}(x) \in \mathbb{B}(0,r)$.

On a montré que $\forall y \in \mathbb{B}\left(0, \frac{r}{2}\right),\ \exists! x \in \mathbb{B}(0,r)\,,\ f(x) = y$.

On note $V = f^{-1}\left(\mathbb{B}\left(0, \frac{r}{2}\right)\right) \cap \mathbb{B}(0,r)$ ouvert de U et $W = \mathbb{B}\left(0, \frac{r}{2}\right)$ ouvert de $\mathbb{R}^n$.
D'après précédemment,

$$f|_V :\ V \to W \text{ est bijective.}$$

On note $g\ :\ W \to V$ l'application réciproque et $h = h^{(0)}\ :\ x \mapsto x - f(x)$.
On a alors

$$\forall x \in \mathbb{B}(0,r)\,,\ x = h(x) + f(x).$$

D'où

$$\begin{aligned}\forall x, x' \in \mathbb{B}(0,r)\,,\ \left\|x - x'\right\| &\leqslant \left\|h(x) - h(x')\right\| + \left\|f(x) - f(x')\right\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left\|x - x'\right\| + \left\|f(x) - f(x')\right\|\end{aligned}$$

soit

$$\forall x, x' \in \mathbb{B}(0,r)\,,\ \left\|x - x'\right\| \leqslant 2\left\|f(x) - f(x')\right\|.$$

On en déduit que

$$\forall x, x' \in W,\ \left\|g(x) - g(x')\right\| \leqslant 2\left\|x - x'\right\|.$$

On conclut que g est 2-lipschitzienne, donc continue.

Soit $y \in W$. Soit $w \in W$ tel que $y + w \in W$.
Il existe $x \in V$ et $v \in V$ tels que

$$y = f(x) \text{ et } y + w = f(x+v).$$

On calcule

$$\begin{aligned}
\Delta_y(w) &= g(y+w) - g(y) - (df_x)^{-1}[w] \\
&= x + v - x - (df_x)^{-1}\left[f(x+v) - f(x)\right] \\
&= -(df_x)^{-1}\left[f(x+v) - f(x) - df_x[v]\right]
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta_y(w)\right\| &\leqslant \left\|\left(df_x\right)^{-1}\right\| \cdot \left\|f(x+v) - f(x) - df_x[v]\right\| \\
&\leqslant 2\left\|v\right\| \varepsilon_x(v) \\
&\leqslant 2\left\|g(y+w) - g(y)\right\| \varepsilon_x(g(y+w) - g(y)) \\
&\leqslant 4\left\|w\right\| \varepsilon_x(g(y+w) - g(y)).
\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{w \to 0} \varepsilon_x(g(y+w) - g(y)) = 0$ par continuité de g.

Donc g est différentiable en $y = f(x) \in \mathbb{B}(0,r)$ et $dg_{f(x)} = (df_x)^{-1}$. $\square$